

Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

УДК 517.9

Нальский Максим Борисович

Негиперболичность инвариантных мер
на максимальном аттракторе.

Москва, 2007

Содержание

1	Основной результат	3
2	Редукция гладкого случая к гельдеровым косым произведениям	4
3	Гельдеровы косые произведения	5
3.1	Управляемые косые произведения	6
3.2	Построение периодических орбит	8
3.3	Эргодичность и нулевые показатели Ляпунова	9
3.4	Доказательство теоремы 3	10

1 Основной результат

Настоящая работа связана с попытками ответить в той или иной мере на вопрос, насколько поведение *типичной* динамической системы *гиперболично*.

Гиперболические динамические системы имеют ненулевые показатели Ляпунова, но не являются типичными в пространстве всех динамических систем [1]. Неравномерно гиперболические системы, изучаемые в теории Песина [2], также имеют ненулевые показатели Ляпунова и так же нетипичны.

Теория Песина изучает диффеоморфизмы, имеющие ненулевые показатели Ляпунова относительно некоторой фиксированной инвариантной меры, и описывает поведение траекторий, типичных относительно этой меры. В общем случае, инвариантная мера может быть задана изначально и согласована с гладкой структурой, а может определяться динамической системой. Эти два случая существенно отличаются друг от друга.

Для C^1 -диффеоморфизмов двумерных многообразий, сохраняющих площадь, Boschi [4] обнаружил, что типичные отображения этого класса являются либо Аносовскими, либо имеют нулевые показатели Ляпунова.

Для больших размерностей в работе [6] установлено, что в пространстве устойчиво-эргодических C^2 -диффеоморфизмов с C^1 -топологией, сохраняющих гладкую форму объема на компактном многообразии размерности 2 и выше, существует открытое и плотное подмножество неравномерно гиперболических отображений.

Если диффеоморфизм частично гиперболический, сохраняет объем и является устойчиво эргодическим, то Baraviera и Bonatti [7] показали, что сколь угодно малым C^1 -возмущением можно сделать центральный показатель Ляпунова ненулевым.

Настоящая работа относится ко второму из упомянутых направлений – исследованию систем, чьи инвариантные меры определяются динамикой и могут быть не согласованы с гладкой структурой. Оказывается, если отказаться от заданной априори гладкой инвариантной меры, то нулевые Ляпуновские показатели встречаются гораздо чаще.

Теорема 1 (Основной результат). *Для замкнутого многообразия M , $\dim M \geq 4$, найдется такая область $U \subset \text{Diff}^1(M)$, что любой диффеоморфизм $f \in U$ имеет локально максимальный частично гиперболический аттрактор $\Lambda \subset M$ и неатомарную эргодическую инвариантную меру μ с $\text{supp } \mu = \Lambda$, один из показателей Ляпунова относительно которой равен нулю.*

Доказательство теоремы 1 состоит из двух частей. В первой части проводится редукция общего вопроса для гладких динамических систем к аналогичному результату про косые произведения, следуя работе [13].

В второй части, более технической и оригинальной, содержится обоснование упомянутого результата для косых произведений над соленоидом Смейла-Вильямса. В упрощенном случае (подковы Смейла вместо соленоида) эти рассуждения приведены в работах [14] и [15].

Автор признателен А. С. Городецкому, Ю. С. Ильяшенко и В. А. Клепщину за полезные идеи и обсуждения.

2 Редукция гладкого случая к гильдеровым косым произведениям

Мы рассматриваем динамические системы, являющиеся косыми произведениями над соленоидом Смейла-Вильямса:

$$F : \Lambda_0 \times S^1 \rightarrow \Lambda_0 \times S^1, \quad F(s, x) = (T(s), f_s(x)). \quad (1)$$

Здесь Λ_0 — соленоид, то есть максимальный аттрактор соответствующего отображения T полнотория D в себя (см. раздел 3); f_s непрерывно зависящее от параметра $s \in \Lambda_0$ семейство диффеоморфизмов окружности.

Если зависимость f_s от s гильдерова, то будем говорить о *гильдеровом* косом произведении; наконец, если семейство f_s является ограничением на Λ_0 гладко зависящего от $s \in D$ семейства, то такое семейство будем называть *гладким*.

Гильдеровы косые произведения естественно возникают при “выпрямлении” динамики на частично-гиперболических инвариантных множествах. Следующее предложение является связующим звеном между исследованием типичных диффеоморфизмов и теорией косых произведений.

Теорема 2. *Пусть задан гладкий диффеоморфизм F из $D \times S^1$ в себя, являющийся косым произведением над отображением соленоида T , достаточно близкий к тождественному вдоль слоя. Тогда у любого диффеоморфизма \tilde{F} , достаточно близкого к F , максимальный аттрактор $\tilde{\Lambda}$ гомеоморфен $\Lambda_0 \times S^1$, а ограничение $\tilde{F}|_{\tilde{\Lambda}}$ при этом гомеоморфизме переходит в гильдерово косое произведение, близкое к $F|_{\Lambda_0 \times S^1}$.*

Строгая формулировка и доказательство содержится в работах А. С. Городецкого [13] и Hirsh, Pugh, Shub [10]. Применение этой теоремы, позволяет перенести некоторые свойства косых произведений на диффеоморфизмы. Основной результат настоящей статьи в терминах косых произведений формулируется следующим образом:

Теорема 3. *Существует открытая область U в пространстве гёльдеровых косых произведений над соленоидом Смейла-Вильямса Λ_0 , содержащая гладкие косые произведения, сколь угодно близкие к тождественному по слою, такая, что любое отображение $f \in U$ имеет эргодическую меру с полным носителем Λ_0 и нулевым показателем Ляпунова вдоль слоя.*

Основной результат выводится из этих двух утверждений следующим образом: рассматривается гладкое отображение компактного многообразия, обладающее частично гиперболическим инвариантным множеством, гомеоморфным прямому произведению соленоида на окружность $\Lambda_0 \times S^1$. Отображение строится таким образом, чтобы динамика на инвариантном множестве являлась гладким косым произведением из области, обеспеченной теоремой 3. Согласно теореме 2, все диффеоморфизмы, достаточно близкие к построенному, содержат подмножество, динамика на котором сопряжена гёльдеровому косому произведению, близкому к исходному, а значит, принадлежащему той же области. Тогда для этого косого произведения найдётся инвариантная мера с нулевым показателем Ляпунова вдоль слоя. Отсюда для соответствующей инвариантной меры возмущённого диффеоморфизма один из показателей Ляпунова равен нулю.

3 Гельдеровы косые произведения

Рассмотрим соленоид Смейла-Вильямса, реализованный как отображение полнотория. А именно, пусть B — единичный диск на плоскости с комплексной координатой u , S^1 — окружность, $D = S^1 \times B$. Рассмотрим отображение $T : D \rightarrow D$:

$$T : (\varphi, u) \rightarrow (6\varphi \mod 1, \frac{1}{2}e^{2\pi i\varphi} + \frac{1}{100}u)$$

Отображение T имеет локально максимальный гиперболический аттрактор Λ , гомеоморфный $\tilde{\Sigma}^6$ — пространству двусторонних последовательностей из символов $\{0, \dots, 5\}$, в котором отождествлены точки $\{\dots w_0 \dots w_k 555 \dots\}$ и $\{\dots w_0 \dots (w_k + 1)000 \dots\}$. Ограничение $T|_{\Lambda}$ сопряжено сдвигу Бернулли $\sigma : \tilde{\Sigma}^6 \rightarrow \tilde{\Sigma}^6$, а отображение (1), тем самым,

сопряжено отображению:

$$G : \tilde{\Sigma}^6 \times S^1 \rightarrow \tilde{\Sigma}^6 \times S^1, \quad (\omega, x) \rightarrow (\sigma\omega, g_\omega(x)), \quad (2)$$

где g_ω — семейство диффеоморфизмов окружности, непрерывно в Diff^1 -норме зависящих от ω (в частности, гладкое вдоль слоёв).

Теорема 2 влечет выполнение для отображения G **условий** (L, C, α) -гельдеровости:

$$\forall \omega, \omega' \in \tilde{\Sigma}^6 \quad d_{C^0}(g_\omega, g_{\omega'}) < C \cdot d_{\tilde{\Sigma}}(\omega, \omega')^\alpha,$$

$$\forall \omega \in \tilde{\Sigma}^6 \quad \max_{x \in S^1} \max(g'_\omega(x), (g_\omega^{-1})'(x)) < L.$$

для некоторых констант $L > 1$, $C > 0$, $\alpha \in (0, 1)$.

3.1 Управляемые косые произведения

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{g}_m[\omega] &= g_{\sigma^{m-1}\omega} \circ \dots \circ g_{\sigma\omega} \circ g_\omega, \\ \bar{g}_{-m}[\omega] &= g_{\sigma^{-m}\omega}^{-1} \circ \dots \circ g_{\sigma^{-1}\omega}^{-1}, \\ \bar{g}_0[\omega] &= \text{id}. \end{aligned}$$

Пусть a — произвольное конечное слово из символов $0, \dots, 5$. Через $\{\dots | a \dots\}$ мы обозначаем произвольную бесконечную последовательность $\omega \in \tilde{\Sigma}^6$, у которой, начиная с нулевого места, записано слово a . Аналогично вводим обозначения $\{\dots a | \dots\}$ и $\{\dots a | b \dots\}$. Латинская w и греческая ω обозначают слова конечной и бесконечной длины соответственно.

Определение 1. Пусть косое произведение G является (L, C, α) -гельдеровым. Скажем, что оно обладает свойством

- *растяжения*, если существуют $\nu > 1$, $\delta_1 > 0$, такие, что для произвольного интервала $I \subset S^1$, $|I| < \delta_1$:

$$\exists j_1 \neq 5 : \forall \omega = \{\dots | j_1 \beta \dots\}, \beta \neq 5, \quad \forall x \in I \quad (Dg_\omega)(x) > \nu \quad (3)$$

- *обратного растяжения*, если существуют $\nu > 1$, $\delta_1 > 0$, такие, что для произвольного интервала $I \subset S^1$, $|I| < \delta_1$:

$$\exists j_2 \neq 5 : \forall \omega = \{\dots j_2 | \beta \dots\}, \beta \neq 5, \quad \forall x \in I \quad (Dg_{\sigma^{-1}\omega}^{-1})(x) > \nu; \quad (4)$$

- *наличия δ_2 -поворота*, если для любой последовательности $\omega = \{\dots | 0\beta \dots\}$, $\beta \neq 5$, верно:

$$d_{C^0}(g_\omega, H_{\delta_2}) < \frac{\delta_2^2}{40}; \quad (5)$$

здесь через H_{δ_2} обозначен поворот на угол δ_2 .

- *наличия слабопритягивающей орбиты*, если существует притягивающая периодическая орбита X , для показателя Ляпунова вдоль слоя которой, обозначаемого $\lambda(X) < 0$, выполнено

$$\lambda(X) + \ln \nu > 0 \quad (6)$$

- *γ -предсказуемости траекторий*, $\gamma > 0$, если для любой точки $x \in S^1$, для любого натурального m , для любого конечного слова $w^* = w_{-m} \dots w_{-1} | w_0 \dots w_{m-1}$ выполняется

$$\text{diam}\{\bar{g}_{\pm m}[\omega](x) | \omega = \{\dots w^* \dots\}\} < \gamma \quad (7)$$

Определение 2. (L, C, α) -гельдерово косое произведение называется *управляемым*, если оно обладает всеми свойствами определения 1, причём константы могут быть выбраны удовлетворяющими *условию согласованности констант*. Последнее состоит в том, что

$$\gamma < \frac{\delta_2}{40}, \quad \delta_1 > 3\delta_2 \quad (8)$$

и

$$\alpha > \log_2 L.$$

Лемма 1. Для любых заданных $L > 1$, $C > 0$ и $\alpha \in (0, 1)$ множество управляемых систем непусто, открыто и содержит отображения, сколь угодно близкие к тождественному вдоль слоя.

Доказательство. Действительно, в произвольной окрестности $W \subset \text{Diff}^1(S^1)$ тождественного отображения окружности можно выбрать три гиперболических диффеоморфизма $g_{1,2,3}$ с одним аттрактором и одним репеллером, обеспечивающие свойства растяжения и обратного растяжения, поворот на малый угол g_0 , диффеоморфизм Морса-Смейла g_4 с притягивающей периодической орбитой и тождественное отображение $g_5 := id$. Определим отображения семейства $g_\omega := g_i$ на словах вида $\{\dots | i\beta \dots\}$, где $\beta \neq 5$,

и продолжим семейство гладким образом на оставшиеся слова базы. Отображения продолжения можно выбрать принадлежащими окрестности W . Непустота доказана.

В отношении всех свойств определения 1, кроме свойства предсказуемости траекторий, ясно, что они C^1 -устойчивы. Следующая лемма, принадлежащая А. С. Городецкому, выводит предсказуемость траекторий из условия на показатель Гёльдера и скорость растяжения.

Лемма 2 ([12, Lemma 3.1]). *Пусть заданы L , C и α , такие, что выполнено $\alpha > \log_2 L$ — второе из условий согласованности констант. Тогда существует такое $K = K(L, C, \alpha)$, что для любой (L, C, α) -системы, δ -близкой к S -ступенчатой,*

$$d_{C_0}(\bar{g}_{\pm m}[\omega], \bar{g}_{\pm m}[\omega']) \leq \gamma := K\delta^\beta, \quad (9)$$

$$\text{где } \beta = 1 - \frac{\ln L}{\ln 2^\alpha}.$$

Таким образом, неравенство $K\delta^\beta < \frac{\delta_2}{40}$ на расстояние δ от управляемой системы до её возмущения влечет выполнение условия предсказуемости траекторий для последнего. ■

3.2 Построение периодических орбит

Определение 3. Пусть задана периодическая орбита X отображения G , период X равен P , и $\varepsilon > 0$ — фиксировано. Точка y называется (ε, P) -близкой к орбите X , если найдется $x \in X$ такое, что

$$\forall l = 0, 1 \dots P-1 \quad d(G^l(x), G^l(y)) < \varepsilon.$$

Лемма 3 (Основная лемма). *Пусть косое произведение G вида (2) обладает свойством управляемости и $D = D(G) > 0$ — некоторая константа. Пусть X — произвольная периодическая орбита G периода P с мультипликатором по слою $0 < \theta < 1$, для показателя Ляпунова вдоль слоя $\lambda := \frac{\ln \theta}{P}$ которой выполняется:*

$$\lambda + \ln \nu > D.$$

Пусть U — произвольная окрестность в $\tilde{\Sigma}^6 \times S^1$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует периодическая орбита Y косого произведения G с периодом $P' > 2P$ и показателем Ляпунова вдоль слоя $\lambda' < 0$ такая, что:

1. орбита Y пересекает окрестность U ;

2. $|\lambda'| < C|\lambda|$, где $C = C(G)$ — глобальная константа, зависящая только от косо́го произведения G , $0 < C < 1$;

3. $\lambda' + \ln \nu > D$;

4. существует $\tilde{Y} \subset Y$ и проекция $\pi : \tilde{Y} \rightarrow X$ такие, что:

(a) все точки множества \tilde{Y} являются (ε, P) -близкими к орбите X , причем в определении 3 можно взять $x = \pi(y)$;

(b) доля $\varkappa := \frac{\#\tilde{Y}}{\#Y}$ точек, в которых определена проекция π , оценивается как:

$$\varkappa \geq 1 - \frac{3|\lambda|}{\ln L};$$

(c) количество элементов прообраза $\pi^{-1}(x)$ одинаково для всех $x \in X$.

Доказательство. Периодическая орбита косо́го произведения задается своей начальной точкой (ω, x) , $\omega \in \tilde{\Sigma}^6$, $x \in S^1$, $\omega = (w)$ — периодическая последовательность, $w = (w_0 \dots w_{P-1})$ — ее период и верно:

$$\sigma^P \omega = \omega \quad \bar{g}_P[\omega](x) = x.$$

Используя свойства управляемости и зафиксировав интервал J на центральном слое, мы подбираем серию слов $w'(k)$ в базе, длина которых возрастает с ростом натурального параметра k . Соответствующие отображения косо́го произведения будут сжимать J в себя, гарантируя наличие притягивающей вдоль слоя неподвижной точки, а их производная на J будет равномерно ограничена по k . Увеличивая k , можно добиться сколь угодно близкого к нулю отрицательного показателя Ляпунова.

Попутно, строя новую орбиту Y , мы обеспечиваем ее прохождение через окрестность U и близость точек новой и старой орбит (свойства 4a–4c). Это позволит нам получить свойства предельной меры: весь аттрактор в качестве носителя и близость временных и пространственных средних.

Техника доказательства подробно описана в [15]. ■

3.3 Эргодичность и нулевые показатели Ляпунова

Лемма 4. Для любой управляемой системы найдётся эргодическая инвариантная мера с полным носителем и нулевым показателем Ляпунова вдоль слоя.

Доказательство. Выберем счётное семейство окрестностей U_i таких, что каждая точка пространства покрыта окрестностью сколь угодно малого диаметра.

Воспользовавшись леммой 3, мы можем построить последовательность притягивающих вдоль слоя периодических орбит X_i , начинающуюся со слабопритягивающей орбиты (см. (6)), каждая орбита X_i пересекается с окрестностью U_i . Показатели Ляпунова для этих орбит экспоненциально стремятся к нулю, причём каждая следующая орбита большую часть времени проводит около предыдущей.

Рассмотрим последовательность атомарных мер, равномерно распределённых на этих орбитах. Из условия на “похожесть” орбит (см. заключение 4 леммы 3) с помощью эргодической теоремы Биркгофа-Хинчина выводится, что любая предельная точка построенной последовательности будет эргодической инвариантной мерой; также несложно проверяется неатомарность предельной меры. Поскольку пространство мер на $\tilde{\Sigma}^6 \times S^1$ *-слабо компактно, мы можем выделить из этой последовательности сходящуюся — в силу вышесказанного к эргодической инвариантной мере — подпоследовательность. Эта предельная мера и будет искомой.

Действительно, показатель Ляпунова для эргодической инвариантной меры выражается как интеграл по этой мере от непрерывной функции — производной отображения вдоль слоя. Поэтому показатель Ляпунова для предельной меры равен пределу показателей Ляпунова, то есть нулю.

С другой стороны, если орбита X_i перескает U_i , то пересечение есть и у всех орбит X_j , $j > i$, причем доля общих точек не стремится к нулю. Тем самым, предельная мера U_i не равна нулю, что обеспечивает совпадение носителя меры со всем пространством.

Эти рассуждения строго проведены в работе [14] (см. леммы 1 и 2) для частного случая ступенчатых косых произведений над подковой Смейла и дословно переносятся на общий случай. ■

3.4 Доказательство теоремы 3

Построенная при доказательстве леммы 1 система является не только гильбертовой, но и гладкой, а все близкие — управляемыми гильбертовыми. В силу лемм 3 и 4 для них найдется эргодическая инвариантная мера с нулевым показателем Ляпунова вдоль слоя. Теорема доказана.

Список литературы

- [1] R. Abraham, S. Smale. Global Analysis, Proc. of Symposia in Pure Math., AMS, 1970, **14**, pp. 5–8.
- [2] Я. Б. Песин. УМН, 1977, том **32**, вып. **4** (196), стр. 55–112.
- [3] C. Bonatti, X. Gomez-Mont, M. Viana. Ann. Inst. H. Poincare, 2003, Vol. **20**, pp.579–624.
- [4] J. Bochi. Erg. Th. Dynam. Sys., 2002, Vol. **22**, no. 6, pp. 1667–1696.
- [5] J. Bochi, M. Viana. Ann. Inst. H. Poincare, 2002, Vol. **19**, no. 1, pp. 113–123.
- [6] J. Bochi, B. R. Fayad, E. Pujals. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Ser. I, 2006, Vol. **342**, pp. 763 – 766.
- [7] A. Baraviera, C. Bonatti. Erg. Th. and Dynam. Sys., 2003, Vol. **23**, pp. 1655–1670.
- [8] M. Shub, A. Wilkinson. Inventiones Math., 2000, Vol. **139**, pp. 495–508.
- [9] D. Ruele, A. Wilkinson. Comm. Math. Phys., 2001, Vol. **219**, no. 3, pp. 481–487.
- [10] M. W. Hirsch, C. C. Pugh, M. Shub. Lecture Notes in Mathematics, Berlin-New York, Springer-Verlag, 1977, Vol. **583**.
- [11] А. С. Городецкий, Ю. С. Ильяшенко. Функц. анал. и его прил., 1999, том **33**, N 2, стр. 16–30.
- [12] А. С. Городецкий, Ю. С. Ильяшенко. Труды МИАН, 2000, том **231**, стр. 96–118
- [13] А. Городецкий. Известия РАН, 2006, том **70**, вып. 6, стр. 52–78.
- [14] А. Городецкий, Ю. Ильяшенко, В. Клепцын, М. Нальский, Функц. анал. и его прил., 2005, том **39**, вып. 1, стр. 27–38.
- [15] В. Клепцын, М. Нальский. Функц. анал. и его прил., 2007, принята к печати.